Propuesta de Trabajos Fin de Grado, curso académico 2024-25

PROFESOR: Fernando Quirós Gracián

Número máximo de TFG que solicita dirigir: **2**

1.- **TEMA:** El 19º problema de Hilbert

Válido para: 1 alumno.

Resumen/contenido: El 19º problema de Hilbert, proveniente del Cálculo de Variaciones, consiste en demostrar que los minimizantes locales del funcional de energía $E(w)=\int_{\Omega} F(Dw)$ son regulares si F es regular. Uno de los pasos para resolverlo es demostrar la regularidad Hölder de las soluciones de ecuaciones lineales elípticas en forma de divergencia con coeficientes medibles y acotados (posiblemente discontinuos). En este trabajo se estudiará la solución dada por E. de Giorgi en 1957 a este paso. De acuerdo con los intereses del alumno, se podrían estudiar también las demostraciones alternativas de Nash (1958) o Moser (1960). También se podría analizar algún otro de los pasos de la solución del problema original propuesto por Hilbert.

Requisitos: Se trata de un trabajo exigente, que requiere un buen conocimiento de Teoría de la Medida, y gusto por el Análisis Matemático y las EDP. Convendría que quien lo vaya a realizar curse las asignaturas "Variable Real" y "Ecuaciones Diferenciales y Aplicaciones" y, a ser posible, también "Análisis Funcional".

Asignaturas de cuarto relacionadas/compatibles: "Variable Real", "Ecuaciones Diferenciales y Aplicaciones" y "Análisis Funcional".

Bibliografía/referencias:

- De Giorgi, E. *Sulla differenziabilità e l'analiticità delle estremali degli integrali multipli regolari.* (Italian) Mem. Accad. Sci. Torino. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. (3) 3 (1957) 25–43.
- DiBenedetto, E. "Partial differential equations." Second edition. Cornerstones. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 2010. ISBN: 978-0-8176-4551-9.
- Moser, J. *A new proof of De Giorgi's theorem concerning the regularity problem for elliptic differential equations.* Comm. Pure Appl. Math. 13 (1960), 457–468.
- Nash, J. *Continuity of solutions of parabolic and elliptic equations.* Amer. J. Math. 80 (1958) 931–954.
- Vasseur, A. F. *The De Giorgi method for elliptic and parabolic equations and some applications.* Lectures on the analysis of nonlinear partial differential equations. Part 4, 195–222, Morningside Lect. Math., 4, Int. Press, Somerville, MA, 2016.

2.- **TEMA:** Nociones de solución en EDP

Válido para: 1 alumno.

Resumen/contenido: Las ecuaciones en derivadas parciales (EDP) son fundamentales en la modelización de numerosos fenómenos de diversos campos, como la física o la biología. Aunque no siempre tienen una solución en un sentido clásico, pueden quizá tenerla en un sentido generalizado. La noción adecuada de solución puede depender del tipo de EDP. En este trabajo estudiaremos varias nociones de solución (clásicas, débiles, viscosas, de entropía, etc.) analizando las ventajas e inconvenientes de cada una a la hora de tratar una EDP dada.

Requisitos: Es imprescindible haber cursado “Ecuaciones en Derivadas Parciales” y “Teoría de la Integral y de la Medida”.

Asignaturas de cuarto relacionadas/compatibles: “Variable Real”, “Ecuaciones Diferenciales y Aplicaciones” y “Análisis Funcional”.

Bibliografía/referencias:

- Evans, L. C. “Partial Differential equations. Second edition”. Graduate Studies in Mathematics, 19. American Mathematical Society, Providence, RI, 2010.
- Brezis, H. “Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations.” Universitext. Springer, New York, 2011. (Existe una version más antigua en español).
- Caffarelli, L. A.; Cabré, X. “Fully nonlinear elliptic equations”. American Mathematical Society Colloquium Publications, 43. American Mathematical Society, Providence, RI, 1995.
- Krylov, N. V. “Sobolev and viscosity solutions for fully nonlinear elliptic and parabolic equations”. Mathematical Surveys and Monographs, 233. American Mathematical Society, Providence, RI, 2018.
- Dafermos, C. M. “Hyperbolic conservation laws in continuum physics. Fourth edition”. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, 325. Springer-Verlag, Berlin, 2016.

3.- **TEMA:** Teselaciones

Válido para: 1 alumno.

Resumen/contenido: Una teselación (o mosaico) es un recubrimiento del plano con piezas que no se superponen, llamadas teselas (o azulejos). Su búsqueda ha sido un tema de interés tanto en matemáticas como en arte durante siglos. Es bien conocido que se puede teselar el plano con triángulos, cuadrados y hexágonos regulares, todos del mismo tamaño. ¿Hay alguna otra pieza convexa que nos permita teselar el plano? Encontrar cuántas y cuáles ha llevado casi 100 años, en una apasionante búsqueda que terminó (parece) en 2017. Además de este tipo de teselaciones con teselas congruentes, estudiaremos otras con patrones menos convencionales, utilizando herramientas geométricas y combinatorias.

Requisitos: Conviene tener gusto por la Geometría y la Combinatoria y también por la experimentación con el ordenador, pues intentaremos usar alguna herramienta informática (quizá GeoGebra) para crear teselaciones.

Asignaturas de cuarto relacionadas/compatibles: Ninguna en especial.

Bibliografía/referencias:

- COMAP, "For All Practical Purposes. Mathematical Literacy in Today's World. 11th edition". W. H. Freeman & Co., 2021.
- Gardner, M. *On tessellating the plane with convex polygon tiles.* Scientific American 233 (1975), no. 1, 112–119.
- Grünbaum, B.; Shephard, G. C. "Tilings and Patterns". W. H. Freeman, 1987.
- Kershner, R. *On paving the plane.* Amer. Math. Monthly 75 (1968), no. 8, 839–844.
- Mann, C.; McLoud-Mann, J.; Von Derau, D. *Convex pentagons that admit i-block transitive tilings.* Geom. Dedicata 194 (2018), 141–167.
- Niven, I. *Convex polygons that cannot tile the plane.* Amer. Math. Monthly 85 (1978), no. 10, 785–792.
- Rao, M. *Exhaustive search of convex pentagons which tile the plane.* Prepublicación. Disponible en arXiv:1708.00274.
- Zong, Ch. *Can you pave the plane with identical tiles?* Notices Amer. Math. Soc. 67 (2020), no. 5, 635–646.

4.- **TEMA:** Los comienzos del Cálculo Infinitesimal

Válido para: 2 alumnos (cada uno de ellos abordaría un aspecto distinto).

Resumen/contenido: El cálculo infinitesimal es una de las ramas fundamentales de las matemáticas, con aplicaciones que se extienden a diversas disciplinas científicas y técnicas. Este trabajo tiene como objetivo explorar sus inicios, destacando el desarrollo histórico, las ideas clave y las contribuciones de los algunos de los matemáticos que dieron forma a esta área del conocimiento.

Observaciones. (i) Dada la amplitud del tema, tal vez sea necesario concentrase en algún aspecto o matemático concreto.

(ii) En la medida de lo posible intentaremos acceder a parte de la información a través de las fuentes originales (para esto pueden ser útiles los libros editados por Durán y Struik).

Requisitos: Puede venir bien haber cursado "Teoría de la Medida"

Asignaturas de cuarto relacionadas/compatibles: "Historia de las Matemáticas".

Bibliografía/referencias:

- Boyer, C. B. "The history of the calculus and its conceptual development". Dover Publications, Inc., New York, 1959.
- Durán, A. (editor) "La polémica sobre la invención del cálculo infinitesimal". Ed. Crítica, 2006.
- Guicciardini, N. "Reading the Principia. The debate on Newton's mathematical methods for natural philosophy from 1687 to 1736". Cambridge University Press, Cambridge, 1999.
- Guicciardini, N. *Did Newton use his calculus in the Principia?* Centaurus 40 (1998), no. 3-4, 303–344.
- Edwards, C. H., Jr. "The historical development of the calculus". Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1979.
- Katz, V. J. "A history of mathematics. An introduction. 3rd Edition". Addison-Wesley, 2009.
- Struik, D. J. (editor) "A source book in mathematics, 1200–1800. Reprint of the 1969 edition". Princeton Paperbacks. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1986.