Propuesta de Trabajos Fin de Grado, curso académico 2023-24

PROFESOR: **Davide Barbieri**

Número máximo de TFG que solicita dirigir: 2

1.- TEMA: Principios de incertidumbre en grupos de Lie

Resumen/contenido:
El principio de incertidumbre fue formulado por Heisenberg en 1927 para describir la imposibilidad de conocer de forma exacta, y al mismo tiempo, la posición y la velocidad de una partícula cuántica. Cinco años después, Wiener y Hardy demostraron que ese aspecto fundamental de la mecánica cuántica se puede demostrar, en su formalismo matemático, a partir de las propiedades de la transformada de Fourier. En particular, fue posible relacionar este fenómeno con la no conmutatividad de ciertas operaciones, que por la física son las mediciones de posición y de velocidad de una partícula, y que en su modelización matemática son dos operadores en un espacio de Hilbert que no conmutan entre sí, y que son el uno la transformada de Fourier del otro. La teoría de grupos ofreció un contexto natural donde estudiar tales objetos no conmutativos, y de allí se desarrolló el estudio del llamado grupo de Heisenberg. Se pudieron además encontrar principios de incertidumbre en otras estructuras de grupo que tuviesen una estructura diferencial, los llamados grupos de Lie. En muchos de tales grupos, se dispone de una noción de transformada de Fourier.

Requisitos: Análisis Matemático, Estructuras Algebraicas, Ecuaciones Diferenciales, Análisis Funcional, Geometría Diferencia.
Asignaturas de cuarto relacionadas/compatibles: Variable Real.

Bibliografía/referencias:

G. B. Folland, Harmonic Analysis in Phase Space. Princeton University Press, 1989.
S. Thangavelu, An Introduction to the Uncertainty Principle. Springer Birkhäuser, 2004.
J. G. Christensen, The Uncertainty Principle for Operators Determined by Lie Groups. The Journal of Fourier Analysis and Applications 10 (2004).

2.- TEMA: Teoría geométrica de la percepción del color

Resumen/contenido:
La teoría clásica de la percepción del color, fundada por Riemann, Helmholtz y Schrödinger, describe el espacio de los colores como una variedad de Riemann de dimensión 3. A nivel psicofísico, este espacio es el resultado del procesamiento de la información capturada por parte de los conos de la retina, sensibles a los colores rojo, verde y azul. Su modelización requiere conceptos de geometría diferencial y teoría de grupos. Esta matematización de la percepción del color empieza definiendo el espacio de los colores percibidos como el cociente entre el espacio de todos los colores posibles respecto a una relación de equivalencia conocida por los psicólogos de la percepción como metamerismo (configuraciones de luz distintas que producen la misma percepción del color). El estudio del grupo de simetrías de este espacio y de su significado perceptivo será el primer objetivo del TFG.

Requisitos: Estructuras Algebraicas, Geometría de curvas y superficies.
Asignaturas de cuarto relacionadas/compatibles: Geometría Diferencial.

Bibliografía/referencias:

H. Resnikoff, Differential geometry and color perception. J. Math. Biol. 1:97–131 (1974).
E. Provenzi, Geometry of color perception. Part 1: structures and metrics of a homogeneous color space. J. Math. Neurosc. 10, 7 (2020).
R. Bujack, E. Teti, J. Miller, E. Caffrey, T. L. Turton, The non-Riemannian nature of perceptual color space. Proc. Natl. Acad. Sci. USA 119:2119753119 (2022).

3.- TEMA: Inversión de la flecha del tiempo y dualidad de procesos de Markov

Resumen/contenido:

Un proceso de Markov es una cadena de Markov en tiempo continuo, cuya probabilidad de transición satisface una ecuación diferencial en derivadas parciales de tipo parabólico, llamada de Fokker-Planck, o de Kolmogorov “hacia adelante”. Para estas ecuaciones, reconstruir de manera exacta las condiciones iniciales a partir del estado actual es en general imposible, siendo el problema mal puesto (o, a veces, mal condicionado). Esta es la “flecha del tiempo”: la difusión presente en estas ecuaciones parabólicas está asociada a irreversibilidad, aumento de entropía, y, en muchas ocasiones, a la convergencia hacia una solución límite que no depende del dato inicial. Pero: ¿qué ocurre exactamente si se consideran las trayectorias respecto a un parámetro de tiempo que corre en dirección contraria? El objetivo de este TFG es deducir las ecuaciones duales de evolución de la probabilidad de transición para estas trayectorias, a partir de un estudio previo de la teoría de las ecuaciones de Kolmogorov. Una aplicación contemporánea de esta teoría se da en los algoritmos de generación artificial de imágenes (como Midjourney o Stable Diffusion), que basan sus mecanísmos de emergencia en la construcción de particulares familias de trayectorias “hacia atrás”.

Requisitos: Análisis Matemático, Modelización, Probabilidad, Topología, EDPs.
Asignaturas de cuarto relacionadas: Probabilidad, Estadística, Variable Real.

Bibliografía/referencias:

L.C.G. Rogers, D. Williams, Diffusions, Markov Processes, and Martingales. Vol. 1, Foundations. John Wiley and Sons, 2nd Ed, 1994.
Z. Schuss, Theory and Applications of Stochastic Processes. Springer 2010.
M. Nagasawa, Markov Processes and Quantum Theory. Birkhäuser Springer, 2021.

4.- TEMA: Optimización numérica de medidas de probabilidad, aprendizaje automático, y un problema de convolución en grupos de Lie para modelizar el vuelo de los estorninos

Resumen/contenido:

Se propone un trabajo interdisciplinar y en parte de investigación para construir una simulación numérica de un modelo reciente que podría dar una descripción del vuelo de los estorninos, problema presentado como ejemplo de sistema complejo por el reciente premio Nobel de física Giorgio Parisi. El modelo es una extensión reciente a ciertos grupos no abelianos de un problema variacional sobre potenciales de interacción anisotrópicos encontrados en física de materiales. La modelización del vuelo de los estorninos que se quiere considerar es la de una optimización por flujo gradiente de un funcional definido por convoluciones de un potencial con medidas de probabilidad sobre grupos asociados a un espacio de configuraciones de posición y orientación. Lo que se propone es la minimización numérica de este funcional, con técnicas hoy utilizadas para el machine learning. Los temas a considerar abarcan tanto el análisis como el álgebra, y el objetivo es una implementación numérica.

Bibliografía/referencias:

G. S. Chirikjian, Stochastic Models, Information Theory, and Lie Groups. Vol. 2, Analytic Methods and Modern Applications. Birkhäuser Springer, 2012.
G. Peyré, M. Cuturi, Computational Optimal Transport. Foundations and Trends in Machine Learning 11, 2019.
J. Mateu, M. G. Mora, L. Rondi, L. Scardia, J. Verdera, Explicit minimisers for anisotropic Coulomb energies in 3D. Advances in Mathematics 434 (2023).
G. Parisi, En un vuelo de estorninos: Las maravillas de los sistemas complejos. Ediciones Paidós 2023..