

## **Propuesta de Trabajos Fin de Grado, curso académico 2024-25**

**PROFESOR:** Jesús García Azorero

Número máximo de TFG que solicita dirigir: 2

1.- **TÍTULO:** El Lema del Paso de la Montaña

### **Resumen/contenido:**

En este trabajo se estudiarán métodos variacionales en problemas con funcionales indeterminados, en los que las soluciones vienen dadas por puntos de silla en lugar de máximos o mínimos. La localización de estos puntos críticos de naturaleza inestable es más delicada, y nos lleva a estudiar cuidadosamente la compacidad y la geometría inherentes al problema. Comenzando por ejemplos sencillos en dimensión finita, pasaremos a la demostración del teorema y después a su aplicación en problemas no lineales, incluyendo algún caso con falta de compacidad global.

### **Requisitos para la realización del trabajo.**

Teniendo en cuenta los contenidos del trabajo, es altamente recomendable que el alumno, más allá de sus conocimientos previos, muestre afición e interés por los campos siguientes: Ecuaciones Diferenciales, Teoría de la Medida y Análisis Funcional.

### **Bibliografía/referencias:**

Algunos textos que pueden ser usados para el trabajo son:

- Youssef Jabri: The Mountain Pass Theorem: Variants, Generalizations and Some Applications. CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS (2011).
- Pucci-Radulescu. The impact of the Mountain-Pass Theory in the Nonlinear Analysis: a mathematical survey. BUMI, Enero 2010.

2.- **TÍTULO:** Resultados Básicos de la Teoría de Transporte Óptimo.

### **Contenido del trabajo**

El origen histórico de lo que entendemos por teoría del transporte óptimo se remonta a la memoria “Mémoire sur la Théorie des Déblais et des Remblais”, presentada por Gaspard Monge ante la Academia de Ciencias de París en 1781. En esta memoria, por encargo de las autoridades municipales de la Comuna de París, Monge estudió el problema siguiente: supongamos que tenemos un volumen de arena, tierra o basura distribuido en unos ciertos montones, con los que pretendemos rellenar unos hoyos o huecos del mismo volumen.

Evidentemente, por razones económicas elementales el traslado debe hacerse de manera que suponga el menor coste posible.

Parece claro que, si existe, un plan de transporte óptimo debe depender tanto de las distribuciones inicial y final de la masa a transportar como de la manera en la que valoremos el coste o trabajo, relacionado con la distancia a cubrir. En este TFG se estudiarán algunos de los avances más importantes registrados en este problema, basados principalmente en el principio de dualidad enunciado por Kantorovich.

En el estudio se utilizarán fundamentalmente técnicas propias de las Ecuaciones en Derivadas Parciales, con especial atención a los métodos de tipo variacional. Pero también será necesario aprender y usar resultados finos de Teoría de la Medida, y algunos conceptos de Análisis Funcional.

### **Requisitos para la realización del trabajo.**

Teniendo en cuenta los contenidos del trabajo, es altamente recomendable que el alumno, más allá de sus conocimientos previos, muestre afición e interés por los campos antes citados: Ecuaciones Diferenciales, Teoría de la Medida y Análisis Funcional.

#### Bibliografía básica:

L.C.Evans: Partial Differential Equations and Monge-Kantorovich Mass Transfer. Current developments in mathematics, 65-126, Int. Press. Boston,

MA, 1999.

C. Villani, Topics in optimal transportation. Amer. Math. Soc., Providence, 2002.

L. Ambrosio. Lecture Notes on Optimal Transport Problems

3.- TÍTULO: Aplicaciones del Principio del Máximo y la Propiedad de la Media.

#### Resumen/contenido:

En este trabajo se tratarán las distintas versiones del principio del máximo para ecuaciones en derivadas parciales de tipo elíptico, dependiendo de la regularidad del tipo de soluciones consideradas (soluciones clásicas, soluciones variacionales o soluciones en sentido de viscosidad). En cada caso se verán ejemplos y aplicaciones.

#### Bibliografía/referencias:

Algunos textos que pueden ser usados para el trabajo son:

C. P. Danet. The Classical Maximum Principle. Some of its extensions and applications. Annals of the Academy of Romanian Scientists: Series on Mathematics and its Applications 3(2) · January 2011.

D. Gilbarg, N. S. Trudinger, Elliptic Partial Differential Equations of Second Order, Classics in Mathematics, Springer, 2001.

M. H. Protter, H. F. Weinberger, Maximum Principles in Differential Equations, Prentice Hall Inc., 1967.

P. Pucci, J. Serrin, A note on the strong maximum principle for elliptic differential inequalities, J. Math. Pures Appl. 79:57-71, 2000.

4.- TEMA: Tipos de soluciones en EDP elípticas.

Válido para 1 alumno.

Resumen/contenido:

En este trabajo se hará un recorrido por diferentes tipos de soluciones en problemas elípticos: soluciones clásicas, soluciones débiles, soluciones en sentido de distribuciones, y soluciones en sentido de viscosidad. En paralelo, para motivar e ilustrar con aplicaciones estos conceptos se estudiarán algunos operadores relacionados: laplaciano clásico,  $p$ -laplaciano, infinito-laplaciano.

Requisitos: Haber cursado la asignatura de Ecuaciones Diferenciales y Aplicaciones.

Asignaturas de cuarto relacionadas/compatibles: EDP

Bibliografía/referencias:

Primer Curso de Ecuaciones en Derivadas Parciales. Ireneo Peral Alonso.

Análisis Funcional, Teoría y aplicaciones. Haim Brezis.

Lecture notes on viscosity solutions. Jeff Calder.

5.- TEMA: Teoría de control en EDO.

Válido para 1 alumno.

Resumen/contenido:

Se estudiarán los principales elementos de la teoría de control para ecuaciones diferenciales ordinarias, incluyendo el principio del máximo de Pontryagin. Dependiendo de la marcha del trabajo y del interés del alumno, hay distintos temas para completarlo: ejemplos de control en EDP (ecuación de ondas), ejemplos de teoría de juegos, o ejemplos de control estocástico.

Requisitos:

Asignaturas de cuarto relacionadas/compatibles:

Bibliografía/referencias:

An Introduction to Mathematical Optimal Control Theory. Lawrence C. Evans.

Ecuaciones diferenciales ordinarias: teoría de estabilidad y control. Miguel de Guzmán.

6.- TEMA: El infinito-laplaciano y las soluciones de viscosidad.

Válido para 1 alumno

Resumen/contenido:

El objetivo de este trabajo es entender y asimilar las notas del curso impartido por P. Lindqvist en la universidad de Pittsburgh, repasando las propiedades básicas del operador infinito-laplaciano desde el punto de vista de las soluciones de viscosidad. Es un material asequible, pero más avanzado que el temario del curso de EDP de cuarto, y exige una cierta familiaridad con conceptos de teoría de la medida y análisis funcional. En cualquier caso, el planteamiento es hacer un trabajo autocontenido, empezando desde los conceptos básicos, y el punto de llegada se fijará de acuerdo a los intereses y la formación previa del alumno.

Requisitos:

Asignaturas de cuarto relacionadas/compatibles: EDP, Análisis Funcional.

Bibliografía/referencias:

Notes on the Infinity-Laplace Equation. Peter Lindqvist.

A Beginner's Guide to the Theory of Viscosity Solutions. Shigeaki Koike.